Esercitaz. sul calcolo di integrali

In particolare, metodi di integrazione

PER PARTI e PER SOSTITUZIONE.

Integrazione per parti.

Siano f, g continue in un intervallo I e derivabili con derivata continua. Allora vale la formula:

$$\int \underbrace{f(x)}_{\text{"fattore finito"}} \cdot \underbrace{g'(x)\,dx}_{\text{"fattore differenziale"}} = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

Infatti: $\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\,g(x) + f(x)\cdot g'(x)$.

Es. 1) $$\int \underbrace{x}_{\text{integro}} \underbrace{\log x}_{\text{derivo}}\,dx = \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^{\cancel{2}}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + c$$

2) $$\int \underbrace{x}_{\text{derivo}} \cdot \underbrace{e^x}_{\text{integro}}\,dx = e^x\cdot x - \int e^x\cdot 1\,dx$$

$$= x e^x - e^x + c.$$

3) $\int \underbrace{1}_{\text{integro}} \cdot \underbrace{\log x}_{\text{derivo}} \, dx = x \log x - \int \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \, dx$

$= x \log x - x + c$

Analogamente

4) $\int \underbrace{1}_{\text{integro}} \cdot \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{\text{derivo}} \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} \, dx$

$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c$

5) $\int 1 \cdot \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

$= x \arcsin x - \frac{1}{2}\int 2x \cdot \underbrace{(1-x^2)}^{-\frac{1}{2}} \, dx$

$= x \arcsin x + \frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c$

$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$

Altri es. di applicaz.

$\int x^2 \log x \quad , \quad \int x^2 e^x$

6) $\int \underbrace{x^2}_{\text{integro}} \underbrace{\log x}_{\text{derivo}} = \frac{x^3}{3} \log x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx$

$= \frac{x^3}{3} \log x - \frac{1}{3}\int x^2 \, dx$

integro

$$= \frac{x^3}{3}\log x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\log x - \frac{1}{9}x^3 + c$$

7) $\int \underset{\text{derivo}}{x^2} e^x = e^x \cdot x^2 - \int e^x \cdot 2x\,dx$

$$= x^2 e^x - 2\int \underset{\text{derivo}}{\underbrace{x}} e^x\,dx$$

$$= x^2 e^x - 2\left[x \cdot e^x - \int e^x \cdot 1\,dx\right]$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c$$

8) $\int \sin^2 x\,dx = \int \sin x \cdot \sin x\,dx$

$$= -\cos x \cdot \sin x + \int \cos x \cdot \cos x\,dx$$

$$= -\cos x \sin x + \int \cos^2 x\,dx$$

$$= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x)\,dx$$

$$= -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x\,dx$$

$$\Rightarrow 2\int \sin^2 x\,dx = -\sin x \cos x + x$$

$$\Rightarrow \int \sin^2 x\,dx = \frac{-\sin x \cos x + x}{2} + c$$

9) $\int 1\cdot \log^2 x \, dx = x \cdot \log^2 x - \int x \cdot \underbrace{2\log x \cdot \frac{1}{x}}_{D(\log^2 x)} \, dx$

$= x\log^2 x - 2\underbrace{\int 1\cdot \log x \, dx}_{\text{fatto prima}}$

$= x\log^2 x - 2x\log x + 2x + c$

Integrazione per sostituzione

Sia f una funzione continua e g una funzione continua e derivabile nell'intervallo J. Allora:

$$(*) \quad \left[\int f(x)\,dx\right]_{x=g(t)} = \int \underbrace{f(g(t))\cdot g'(t)}\,dt$$

(significato del 1° membro:

$\left[\int f(x)\,dx\right]_{x=g(t)} = \underbrace{F(g(t))} + c$ dove F è una primitiva di f)

la formula deriva dalla regola di derivazione della funzione composta, in quanto

$$\frac{d}{dt}F(g(t)) = F'(g(t))\cdot g'(t) \underset{\uparrow}{=} f(g(t))\cdot g'(t)$$

F primitiva

F primitiva di f

funz. integranda al 2° membro

Nella pratica, quando per calcolare l'integrale

$$\int f(x)\,dx$$

si effettua la sostituzione $x = g(t)$, dalla formula

$$\int f(x)\,dx \underset{x=g(t)}{=} \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt$$

deduciamo che dobbiamo effettuare formalmente le sostituzioni $\longrightarrow \begin{cases} x = g(t) & \text{e} \\ dx = g'(t)\,dt \end{cases}$

Nel caso di integrali definiti, è necessario anche cambiare gli estremi di integrazione, cioe'

se $a = g(\alpha)$ e $b = g(\beta)$

allora

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

ovvero, se g e' invertibile :

$$\int^{b} f(x)\,dx = \int^{g^{-1}(b)} f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt$$

$$\int_a f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)} f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$$

Oss. (*) Leggendo la formula

$$\left[\int f(x)\,dx\right]_{x=g(t)} = \int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$$

"da destra verso sinistra", si può osservare che integrali della forma

$$\boxed{\int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt}$$

con la sostituzione $x=g(t)$ si trasformano nell'integrale

$$\boxed{\int f(x)\,dx}$$

da calcolare per $x=g(t)$. (Vedi es. 4), 5), 6))

Esempi.

1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}-3}\,dx$

Uso la sostituz.

$\sqrt{x} = t$ $\quad \begin{cases} x = g(t) \\ dx = g'(t)\,dt \end{cases}$

cioè $x = t^2 = g(t)$

$dx = g'(t)\,dt = 2t\,dt$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{x}-3}\,dx = \int \frac{1}{t-3}\cdot 2t\,dt$$

$\int \sqrt{x} - 3 \qquad \int t - 3$

$$= 2\int \frac{t}{t-3}\, dt = 2\int \frac{t-3+3}{t-3}\, dt$$

$$= 2\int \left(1 + \frac{3}{t-3}\right) dt$$

è equivalente a dividere

$$\begin{array}{l|l} t & t-3 \\ \hline -t+3 & 1 \\ // \; 3 & \end{array}$$

$$\frac{t}{t-3} = 1 + \frac{3}{t-3}.$$

$$= 2t + 6\log|t-3| + c$$

$$\underset{t=\sqrt{x}}{=} 2\sqrt{x} + 6\log|\sqrt{x}-3| + c$$

2) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx$

Sostit.

$e^x = t$

$\Rightarrow x = \log t$

$dx = \frac{1}{t}\, dt$

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx = \int \frac{\cancel{t}}{1+t^2} \cdot \frac{1}{\cancel{t}}\, dt$$

$$= \int \frac{1}{1+t^2}\, dt = \operatorname{arctg} t + c$$

$$\underset{t=e^x}{=} \operatorname{arctg} e^x + c.$$

In realtà, è un integrale "quasi-immediato"

$$\int \frac{1}{1+(e^x)^2} \cdot e^x dx = \operatorname{arctg} e^x + c.$$

$\sqrt{1+(e^x)^2}$

3) $$\int \frac{e^{3x}-e^{2x}+5}{e^x+7}\,dx$$

Poniamo $\boxed{t=e^x}$

$\Rightarrow \quad x=\log t$

$dx=\frac{1}{t}\,dt$

$$=\int \frac{t^3-t^2+5}{t+7}\cdot\frac{1}{t}\,dt$$

$$=\int \frac{t^3-t^2+5}{t^2+7t}\,dt$$

$$\begin{array}{l|l} t^3-t^2+5 & t^2+7t \\ \hline -t^3-7t^2 & t-8 \;\; \text{"}Q(t) \\ // \;\; -8t^2+5 & \\ \;\;\;\;\; +8t^2+56t & \\ \hline // \;\; 56t+5 \;\; \text{"}R(t) & \end{array}$$

$$\Rightarrow \int \frac{t^3-t^2+5}{t^2+7t} = \int (t-8) + \int \frac{56t+5}{t^2+7t}$$

$$=\frac{t^2}{2}-8t+\int \frac{56t+5}{t(t+7)}\,dt$$

Decompon.

$$\frac{56t+5}{t(t+7)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+7}$$

si determinano A, B

$$\Longrightarrow \int \frac{56t+5}{t(t+7)} = A\log|t| + B\log|t+7| + c\,.$$

Esempi: (Conseg. osserv. (*))

Esempi: i cong.

Integrali della forma:

$$\boxed{\int f(\sin x)\cdot \cos x \, dx}, \qquad \boxed{\int f(\cos x)\cdot \sin x \, dx}$$

si affrontano, rispettivamente, con le sostituzioni

$\sin x = t$ e $\cos x = t$

da cui: $$\int f(\sin x) \cos x \, dx \underset{t = \sin x}{=} \int f(t)\, dt$$

e $$\int f(\cos x) \sin x \, dx \underset{t = \cos x}{=} -\int f(t)\, dt$$

Analogamente, integrali della forma:

$$\boxed{\int f(\log x)\cdot \frac{1}{x}\, dx}$$

con la sostituz. $\log x = t$

$$\rightsquigarrow \quad \int f(\log x)\cdot \frac{1}{x}\, dx \underset{t = \log x}{=} \int f(t)\, dt$$

Es. 1) $$\int \underbrace{\frac{\log x}{\log^2 x + 1}}_{= f(\log x)} \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

$t = \log x$

$dt = \frac{1}{x}\, dx$

$$= \int \frac{t}{t^2+1} \, dt$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2+1} \, dt = \frac{1}{2} \log(t^2+1) + c$$

$$\underset{t = \log x}{=} \frac{1}{2} \log(\log^2 x + 1) + c$$

5) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x} \, dx$$

lo posso ricondurre ad un integrale della forma

$$\int f(\sin x) \cdot \cos x \, dx$$

$$\frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x \cdot \cos x}{1+\sin^2 x}$$

$$= \frac{(1-\sin^2 x) \cdot \cos x}{1+\sin^2 x}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{1+\sin^2 x} \cdot \cos x \, dx$$

$t = \sin x$

$dt = \cos x \, dx$

$$\underset{\sin x = t}{=} \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^2} \, dt =$$

$$x = 0 \Rightarrow t = \sin 0 = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$= -\int_0^1 \frac{t^2-1}{t^2+1}\,dt = -\int_0^1 \frac{t^2+1-2}{t^2+1} =$$

$$= -\int_0^1 \left(1 - \frac{2}{t^2+1}\right) dt$$

$$= 2\,\mathrm{arctg}\, t - t \Big|_0^1$$

$$= 2\,\mathrm{arctg}\, 1 - 1 - 2\,\overset{0}{\cancel{\mathrm{arctg}\, 0}} + 0$$

$$= 2\,\frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

5) $$\int \frac{\sin^3 x}{\sin^2 x + 3} \cdot \cos x\,dx \quad \leadsto \quad \text{Poniamo } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x\,dx$$

$$= \int \frac{t^3}{t^2+3}\,dt = \dots$$

Altri esempi di integraz. per sostituzione: funzioni razionali di radici

7) $$\int_1^8 \frac{dx}{x^{1/3} + x^{2/3}}$$

Poniamo

$$x^{1/3} = t$$

$$x = t^3$$

$$dx = 3t^2\,dt$$

$$= \int_1^2 \frac{3t^2\,dt}{t+t^2}$$

$$\underbrace{dx = 3t^2\,dt}$$

$x=1 \Rightarrow t = \sqrt[3]{1} = 1$

$x=8 \Rightarrow t = \sqrt[3]{8} = 2$

$$= \int_1^2 \frac{3t}{1+t}\,dt$$

$$= 3\int_1^2 \frac{t}{1+t}\,dt = 3\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= 3\left(t - \log|1+t|\right)\Big|_1^2$$

$$= 6 - 3\log 3 - 3 + 3\log 2$$

$$= 3 - 3\log\frac{3}{2}.$$